Filière PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

Calculatrices autorisées.
Notation: R désigne l'ensemble des nombres réels.

Première partie.

Soit (E_o) l'équation différentielle : $x y'' + y' + x y = 0$.

1) Déterminer les solutions de (E_o) développables en série entière sur R .

2) On note f_o celle qui prend la valeur 1 en 0 . Montrer qu'il existe un réel c strictement positif tel que f_o ne s'annule pas sur $[\,0, c\,]$. Exprimer les solutions de (E_o) sur $]\,0 , c\,]$ à l'aide de f_o et d'une intégrale. (On pourra poser $y(x) = f_o(x)\, z(x)$).

3) a) Soit $n \in N$, calculer $I_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(\theta)\, d\theta$.

b) Montrer en utilisant un développement en série entière de la fonction cosinus que:

$$f_o(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta \ .$$

4) Si y est solution de (E_o) , on définit pour $x > 0$, la fonction u par : $y(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{x}}$.

a) Ecrire l'équation différentielle (E) vérifiée par u .

b) Soit v une solution de l'équation différentielle $v'' + v = 0$ et u une solution de (E) ;

montrer que pour tout $x > 0$: $\dfrac{(uv)(x)}{4x^2} = (uv'' - u''v)(x)$.

En déduire que si a et b sont deux nombres réels strictement positifs on a :

$$\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2}\, dx = (uv'-u'v)(b)-(uv'-u'v)(a) \ .$$

c) Soit a un réel strictement positif, en appliquant la relation précédente à $v(x) = \sin(x-a)$ et $b = a + \pi$ montrer qu'il existe x_a appartenant à $[\,a , a+\pi\,[$ tel que $f_0(x_a) = 0$.

5) a) Soit $\alpha > 0$. Montrer que l'application Φ_α définie sur R^{*+} à valeurs dans R par :
$\forall x \in R^{*+}\ \Phi_\alpha(x) = f_o(\alpha x)$ est solution de l'équation différentielle : $xy'' + y' + \alpha^2 xy = 0$.

b) Soit α et β deux réels strictement positifs calculer : $(\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 x\, \Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(x)\, dx$

c) Soit $(\alpha_n)_{n\in N^*}$ une suite de réels tels que : $\forall\, n \in N^*$, $\alpha_n \in [n\pi\,,(n+1)\pi[$ et $f_o(\alpha_n) = 0$.
Soit m et n deux entiers positifs distincts, en utilisant la question b)

Calculer $\int_0^1 x\, f_0(\alpha_n x)\, f_0(\alpha_m x)\, dx$.

Deuxième partie.

Soit $n \in N$ et (E_n) l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

1) Soit u la fonction de la variable réelle x définie par : pour tout réel x , $y(x) = x^n u(x)$

a) Si y est solution de (E_n) , quelle est l'équation différentielle vérifiée par u ?
b) Donner alors l'expression des solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur R .
c) En déduire que la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}k!(k+n)!}$ a un rayon de convergence infini et que la fonction f_n définie sur R par : $f_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}k!(k+n)!}$ est solution sur R de l'équation (E_n) .

2) a) Montrer que pour tout entier n , non nul , $f_{n-1} - f_{n+1} = 2f_n'$.
b) Montrer que : $f_1 = -f_0'$
c) Montrer que $f_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta) - \theta)\, d\theta$.

3) Soit $n \in Z$, on note J_n l'application définie sur R par : $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin(\theta) - n\theta)\, d\theta$

a) Trouver, pour $n \in N$, une relation entre J_n et J_{-n} .
b) Trouver, pour $n \in N$, une relation entre f_n et J_n .

4) a) Montrer que pour, $n \in N$, $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin(\theta) - n\theta)}\, d\theta$.
b) Pour x réel positif, non nul, donner le développement en série de Fourier de la fonction g de la variable réelle t , définie par : $g(t) = e^{ix\sin(t)}$.
c) En appliquant la formule de Parseval et en énonçant avec précision le théorème utilisé, montrer que:
i) $\forall\, x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,
ii) $\forall\, x > 0$, $\forall\, n \in N^*$ $|f_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.